GIT 2 : ANALYSE DE STABILITÉ

JEROEN SIJSLING

Voici les notes d'un exposé sur le Chapter 2 du livre *Geometric Invariant Theory* de Mumford. Le but de ce chapitre est de donner une analyse de (semi-)stabilité pour les points géométriques d'un pré-schéma X de type fini sur un corps k sous l'action d'un groupe algébrique G, aussi défini sur k. Je ne vais pas retranscrire mot pour mot tout ce que Mumford fait, d'autant que ses preuves sont bien accèssibles. L'idée est plutôt de donner une intuition de ces résultats et aussi de vérifier les trivialités qui sont omises par Mumford. Il est peut-être instructif d'inclure ces preuves, au moins pour l'auteur lui-même.

Puisque nous considérerons les points géometriques de X, nous pouvons supposer que le corps *k est algébriquement clos*. On peut travailler dans quelque généralité, toutefois pour obtenir des résultats explicites, il faut supposer que *G est un groupe réductif et k est de caractéristique* 0 et que *X est propre sur k*. Il sera indiqué à quels endroits dans l'exposé on utilise ces deux dernières hypothèses. Enfin, tous les morphismes ci-dessous sont des k-morphismes.

Nous dénotons l'automorphisme de X induit par un élément g de G par T_g, et le morphisme $G \to X, g \to gx$ induit par un élément de X par f_x. Rappelons aussi la condition

$$(*) \qquad \begin{array}{l} G \text{ est connexe et n'admet pas de charactère non-trivial et} \\ X \text{ est géométriquement réduit} \end{array}$$

sous laquelle un faisceau $\mathscr{L}$ sur X admet au plus une G-linéarisation et $\mathrm{Pic}^G(X)$ est un sousgroupe de $\mathrm{Pic}(X)$.

1. Sous-groupes à un paramètre

On considère le type plus simple de sous-groupe de G après les sous-groupes de G générés par un element de G :

Définition 1.1. Un *sous-groupe à un paramètre (S1P)* de G est un homomorphisme $\lambda : \mathscr{G}_m \to G$.

Étant donné un S1P λ de G et un point x de X, on construit le morphisme

$$\begin{aligned} f : \mathscr{G}_m &\longrightarrow X \\ \alpha &\longmapsto \lambda(\alpha)x = T_{\lambda(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Or $\mathscr{G}_m$ peut être considéré comme un ouvert de la courbe lisse $\mathbb{A}^1$. *Si X est propre*, alors f s'étend au point 0 et donne un morphisme $\overline{f} : \mathbb{A}_1 \to X$. En pratique, si X est donné par des équations projectives dans $\mathbb{P}^n$, alors f est donné par une application polynomiale

$$\alpha \longmapsto (f_0(\alpha) : \ldots : f_n(\alpha))$$

Pour trouver la valeur de f dans 0, on divise les f_i par la plus grande puissance commune de α, puis on pose $\alpha = 0$.

Soit $\overline{f}(0) = y$ (notation : $\lim \lambda(\alpha)x = y$). Pour $\alpha \in \mathscr{G}_m$, le morphisme $T_\alpha : \mathscr{G}_m \to \mathscr{G}_m$ s'étend uniquement en un morphisme $\overline{T}_\alpha : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, qui envoie 0 sur 0. On a

$\overline{f}\overline{T}_\alpha = T_{\lambda(\alpha)}\overline{f}$ car $fT_\alpha = T_{\lambda(\alpha)}f$. Donc

$$y = \overline{f}(0) = \overline{f}(\overline{T}_\alpha(0)) = T_{\lambda(\alpha)}(\overline{f}(0)) = T_{\lambda(\alpha)}(y) = \lambda(\alpha)y.$$

L'élément α étant arbitraire, on voit que y est fixe sous l'action de $\mathscr{G}_m$ sur X donnée par λ.

Ces limites, qui existent toujours *si X est propre*, satisfont les propriétés auxquelles on s'attendait :

Proposition 1.2. *Soit $x : \mathscr{G}_m \to X$ et $g : \mathscr{G}_m \to X$ deux morphismes de schémas. Soit r un entier et soit β un élément de $\mathscr{G}_m$. On note $x^r(\alpha) = x(\alpha^r)$ et $x^\beta(\alpha) = x(\alpha\beta)$. On a*

(i) $\lim x(\alpha^r) = x_0$ *aussi, ou plus formellement* $\lim x(\alpha) = \lim x^r(\alpha)$.

(ii) $\lim x(\alpha\beta) = x_0$ *aussi, ou plus formellement* $\lim x(\alpha) = \lim x^\beta(\alpha)$.

(iii) *Si la limite g_0 de g existe, alors* $\lim g(\alpha)x(\alpha) = g_0x_0$.

Démonstration. (i) : Conséquence directe de l'unicité des extensions et du fait que 0 est envoyé sur 0 par l'extension à $\mathbb{A}^1$ de l'automorphisme $\alpha \mapsto \alpha^r$ de $\mathscr{G}_m$.

(ii) : Comme (i). Laissé au lecteur.

(iii) : Soit $\sigma : G \times X \to X$ le morphisme qui donne l'action. Les extensions $\overline{x} : \mathbb{A}^1 \to X$ et $\overline{g} : \mathbb{A}^1 \to G$ donnent un morphisme $(\overline{g}, \overline{x}) : \mathbb{A}^1 \to G \times X$. En composant avec σ, on obtient un morphisme qui est donné par $\alpha \to g(\alpha)x(\alpha)$ sur $\mathscr{G}_m$. Sa valeur en 0 est égale à g_0x_0. □

Remarque 1.3. Soit $\lim \lambda(\alpha)x = y$. Alors on a aussi $\lim g\lambda(\alpha)x = gy$ pour des raisons similaires d'unicité. Mais on n'a pas nécessairement $\lim \lambda(\alpha)gx = gy$ (voir la deuxième partie de cet exposé pour résultats dans cette direction).

On s'intéresse aux S1P de G, dans la mésure où on peut réduire les questions de stabilité pour G à des questions de stabilité pour les S1P de G. C'est assez surprenant et repose sur deux résultats qui ne sont pas faciles. Le premier est le critère valuatif de propreté que nous avons vu dans l'exposé sur les schémas. Pour le deuxième, notons $K = k((t))$ et $R = k[[t]]$. Un S1P λ de G donne un K-point de G par le morphisme d'inclusion $k[t, t^{-1}] \to k((t)) = K$. De plus, les morphismes $k \to R \to K$ donnent des inclusions canoniques $G(k) \to G(R) \to G(K)$, et le morphisme quotient $R \to k$ donne une application bien définie $G(R) \to G(k)$ qui est similaire à l'opération limite considérée ci-dessus et qu'on notera encore lim. Bien entendu cette application ne s'étend pas à $G(K)$ en général car G n'est pas nécessairement propre.

Théorème 1.4 (Iwahori). *Supposons que* G est réductif et k est de caractéristique 0. *Soit $g \in G(K)$. Alors il existe un S1P λ de G et $h_1, h_2 \in G(R)$ tels que $g = h_1\lambda h_2$.*

On peut montrer que ce Théorème implique

Proposition 1.5. *L'action d'un groupe réductif G sur une variété X est propre si et seulement si les actions induites par tous les S1P le sont.*

Un corollaire de cette proposition est

Corollaire 1.6. *L'action d'un groupe réductif G sur l'ouvert $X^s_{(0)}$ de X est propre.*

Les démonstrations sont dans *GIT*. Il m'est impossible de améliorer leur clarté. En tout cas, on verra une application du Théorème de Iwahori ci-dessous.

Supposons additionellement qu'on a un faisceau ample et G-linéarisé $(\mathscr{L}, \varphi)$ sur X. On a vu que dans ce cas, on peut plonger X dans un $\mathbb{P}^n$ tel que l'action de G sur X s'étend à $\mathbb{P}^n$ et tel que (une puissance de) L correspond au faisceau $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$. Or géométriquement (au niveau des espaces étalés) ce faisceau correspond à la projection de $\mathbb{A}^{n+1}$ (ou plutôt de $\mathbb{A}^{n+1}$ éclaté en 0, mais puisqu'on va considérer des sections non nulles dans ce qui suit, ça ne fait pas différence) à $\mathbb{P}^n$. Cela nous donne une méthode pour décrire explicitement les point stables et semi-stables.

En partant d'un point x de $X \subset \mathbb{P}^n$, on peut choisir un point non nul $\widetilde{x} \in \mathbb{A}^{n+1}$ au-dessus de x. La linéarisation donne un relêvement de l'action de G sur $\mathbb{P}^n$ à $\mathbb{A}^{n+1}$. On a

Proposition 1.7. (i) *x est semi-stable si et seulement si la clôture de $G\widetilde{x}$ dans $\mathbb{A}^{n+1}$ ne contient pas* 0 *;*

(ii) *x est stable si et seulement si le morphisme $\psi : G \to \mathbb{A}^{n+1}$ donné par $g \mapsto g\widetilde{x}$ est propre.*

Démonstration. On ne fait que la première partie. Une implication est évidente puisque toutes les sections de $\mathscr{O}(k)$ s'annulent en 0. Inversement, on choisit une fonction polynomiale invariante sous l'action sur l'espace affine $\mathbb{A}^{n+1}$ qui vaut 0 en 0 et 1 sur la clôture, dont on prend une partie homogène non-triviale, de degré k disons. Elle correspond à une section globale de $\mathscr{O}(k)$, non nulle bien entendu. □

On peut appliquer Iwahori comme suit :

Corollaire 1.8. (i) *x est semi-stable si et seulement si pour aucun S1P non-trivial λ de G la limite* $\lim \lambda(\alpha)\widetilde{x}$ *est égal à* 0.

(ii) *x est stable si et seulement si pour aucun S1P non-trivial λ de G la limite* $\lim \lambda(\alpha)\widetilde{x}$ *existe.*

Démonstration. Montrons (i) pour compléter Mumford. Un sens est évident. Inversement, si 0 est dans la clôture, alors il existe un point $g \in G(K)$ tel que $f_{\widetilde{x}}g$ est dans $G(R)$ et satisfait $\lim f_{\widetilde{x}}g = 0$. On applique Iwahori pour une décomposition $g = h_1\lambda h_2$, et on pose $s_i = \lim h_i$.

Il est "bien connu" qu'on peut diagonaliser l'action d'un S1P sur $\mathbb{A}^{n+1}$. Explicitement, appliqué au S1P $s_2^{-1}\lambda s_2$ de G, cela signifie qu'on peut choisir des coordonnées $X_0, \dots, X_n$ sur $\mathbb{A}^{n+1}$ telles que l'action de $s_2^{-1}\lambda(\alpha)s_2$ est donnée par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \alpha^{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha^{r_n} \end{pmatrix}.$$

Or on calcule facilement

$$(h_1s_2)^{-1}f_{\widetilde{x}}g = (s_2\lambda s_2)(s_2^{-1}h_2)\widetilde{x}.$$

Le point à gauche est dans $G(R)$, car h_1s_2 et $f_{\widetilde{x}}g$ sont dedans. Sa limite est égale à 0 parce-que $\lim f_{\widetilde{x}}g$ est déjà égale à 0. Utilisons les coordonnées X_i :

$$X_i((h_1s_2)^{-1}f_{\widetilde{x}}g) = t^{r_i}X_i((s_2^{-1}h_2)\widetilde{x}).$$

Puisque la limite du terme à gauche est égale à zéro, on obtient

$$X_i((s_2^{-1}h_2)\widetilde{x}) \in t^{-r_i+1}R.$$

De l'autre côté, la limite de $s_2^{-1}h_2$ est égale à l'identité par construction. Alors

$$X_i((s_2^{-1}h_2)\widetilde{x}) = X_i(\widetilde{x}) \mod tR.$$

Donc $r_i > 0$ pour les i tels que $X_i(\widetilde{x}) \neq 0$, et on voit que dans tous les cas l'action de $s_2^{-1}\lambda s_2$ sur $\widetilde{x}$ est donnée par

$$(X_0(\widetilde{x}), \dots, X_n(\widetilde{x})) \longmapsto (\alpha^{r_0}X_0(\widetilde{x}), \dots, \alpha^{r_n}X_n(\widetilde{x}))$$

avec les r_i tous positifs. La limite existe alors pour le S1P $s_2^{-1}\lambda s_2$, ce qui donne le résultat. $\square$

Cette démonstration indique que les quantités numériques r_i (qui, bien entendu, dépendent de la linéarisation en général) mesurent la stabilité de l'action de G sur X. Étant donné $(\mathscr{L}, \varphi)$ et λ, on voudrait trouver une fonction explicite $\mu(x)$ sur X qui mesure les r_i. Pour les points généraux, c'est assez désagréable car l'action de G ne fixe pas x et l'information dans ce seul point ne suffit pas.

Mais supposons qu'on commence avec un point x_0 qui est fixe. Rappelons que nous pouvons interpréter la linéarisation comme une collection d'isomorphismes $\mathscr{O}_X$-linéaires $\varphi_\alpha : T_\alpha^* \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ telle qu'on a $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \; T_\beta^* \varphi_\alpha$. Après le changement de base $x_0 : \operatorname{Spec} k \to X$, on obtient, par la trivialité de l'action de G sur x_0, des automorphismes $\psi_\alpha : x_0^* \mathscr{L} \to x_0^* \mathscr{L}$ qui satisfont $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta \psi_\alpha$.

Soit $x_0^* L$ l'espace étalé de $x_0^* \mathscr{L}$ et ω_α l'action induite par contravariance sur $x_0^* L$ par ψ_α. Comme $x_0^* \mathscr{L}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur k, $x_0^* L$ est un espace affine de dimension 1 sur k. On a $\operatorname{Aut}_{\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} k}}(\mathscr{L}) = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Aff}}(L) \cong \mathscr{G}_m$. Donc les actions ψ et ω peuvent être identifiées avec des caractères (inverses) $\mathscr{G}_m \to \mathscr{G}_m$. Ces caractères sont bien connus : on a

$$\psi : \alpha \longmapsto \alpha^r$$
$$\omega : \alpha \longmapsto \alpha^{-r}$$

pour un $r \in \mathbb{Z}$. *Si X est propre*, on peut facilement étendre cette fonction à X en posant $\mu(x) = \mu(\lim \lambda(\alpha) x)$. Heureusement, le r de cette construction est vraiment lié aux avec les r_i du Corollaire.

Proposition 1.9. *Soit $x \in X$ et soient r_i les entiers de Corollaire 1.8. Alors on a*

$$r = \min\{r_i : X_i(\widetilde{x}) \neq 0\}.$$

La limite $\lim \lambda(\alpha)\widetilde{x}$ *existe (resp. est égal à* 0*) si et seulement si* $r \geq 0$ *(resp.* $r > 0$*).*

Démonstration. La deuxième partie est évidente car les coordonnées de $\lambda(\alpha)\widetilde{x}$ sont

$$(\alpha^{r_0} X_0(\widetilde{x}), \ldots, \alpha^{r_n} X_n(\widetilde{x})).$$

La quantité r_d à droite est telle que la limite $\widetilde{x}_0$ de $\alpha^{-r_d}\lambda(\alpha)\widetilde{x}$ existe et est non nulle. Nécessairement $\widetilde{x}_0$ est au-dessus de $x_0 = \lim \lambda(\alpha) x$. Comme $\widetilde{x}_0$ est la limite pour l'action donnée par $\alpha^{-r_d}\lambda(\alpha)$, on a

$$\lambda(\alpha)\widetilde{x}_0 = \alpha^{-r_d}\widetilde{x}_0.$$

Cette égalité pour les sections montre que r_d est simplement r. $\square$

Remarque 1.10. La démonstration du Corollaire 1.8 montre que μ est une fonction agréable sur X : il existent des fonctions linéaires ℓ_i telles que pour tout $x \in X(k)$ la fonction μ est le maximum d'un sous-ensemble (correspondant aux coordonnées non nulles de $\widetilde{x}$) de ces formes linéaires.

Ce qui nous mène à la définition fondamentale

Définition 1.11. Soit X un schéma propre sur k muni d'une action d'un groupe G. Soit $x \in X$ et soit $(\mathscr{L}, \varphi)$ un faisceau G-linearisé sur X. On pose

$$\mu^{(\mathscr{L}, \varphi)}(\lambda, x) = r.$$

Cette quantité est appelée *l'invariant local* de λ en x (pour $(\mathscr{L}, \varphi)$).

Si la condition $(*)$ est satisfaite, on peut parler de $\mu^{\mathscr{L}}(\lambda, x)$ sans soucis. La démonstration du Corollaire 1.8 montre que

Théorème 1.12. *Soit G un groupe réductif agissant sur un schéma X propre sur k. Soit $(\mathscr{L},\varphi)$ un faisceau ample G-linearisé, et soit $x \in X(k)$. Alors x est semistable (resp. stable) si et seulement si $\mu^{(\mathscr{L},\varphi)}(x,\lambda) \leq 0$ (resp. < 0) pour tout S1P λ de G.*

L'inversement du signe de μ, par opposition à Mumford, ne donne peut-être pas une impression de stabilité aux conditions du Théoreme. Mais pour moi, cette valeur est plus naturelle, étant liée à la non-existence de certaines limites. Ón a les deux compatibilités suivantes :

Proposition 1.13. (i) *Soit $g \in G(k)$. Alors $\mu^{(\mathscr{L},\varphi)}(gx,\lambda) = \mu^{(\mathscr{L},\varphi)}(x,\lambda^g)$. Ici on pose $\lambda^g(\alpha) = g^{-1}\lambda(\alpha)g$.*

(ii) *Soit $f : X \to Y$ un morphisme G-linéaire. Alors $\mu^{(f^*\mathscr{L},f^*\varphi)}(x,\lambda) = \mu^{(\mathscr{L},\varphi)}(f(x),f\lambda)$.*

Démonstration. Montrons (ii) d'abord. On vérifie, avec la notation évidente, qu'on a $f(x_0) = y_0$, car composer l'extension de λ donnée par x_0 donne une extension de $f\lambda$. Il faut comparer les fibres de $(f^*\mathscr{L}, f^*\varphi)$ en x_0 et de $(\mathscr{L},\varphi)$ en y_0. En considérant x_0 et y_0 comme des morphismes Spec $k \to X$, on a $x_0^*f^* = y_0^*$, ce qui donne une diagramme

$$\begin{tikzcd} x_0^*f^*\mathscr{L} \arrow[d, "(f^*\varphi)_\alpha"'] & y_0^*\mathscr{L} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] \\ x_0^*f^*\mathscr{L} & y_0^*\mathscr{L} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où les flêches horizontales "pullback" sont des isomorphimes. Cela donne le résultat.

La partie (i) de la proposition est une conséquence de la partie (ii). En effet, prenons deux copies X_1 et X_2 de X. Munissons X_2 de la même action que X, et X_1 de l'action conjugée $hx = g^{-1}hgx$. Alors l'isomorphisme $T_g : X_1 \to X_2$ donné par $x \mapsto gx$ est G-équivariant. On a $\mu^{(\mathscr{L},\varphi)}(gx,\lambda) = \mu^{(T_g^*\mathscr{L},T_g^*\varphi)}(x,\lambda^g)$. Mais avec notre modification de l'action par conjugasion, λ^g sur X_1 correspond à λ sur X. De plus, $(T_g^*\mathscr{L}, T_g^*\varphi)$ est alors isomorphe au faisceau $(\mathscr{L},\varphi)$.

(Bien entendu cet isomorphisme existe seulment parce-que nous avons fait cette conjugaison de l'action ; on n'a pas un isomorphisme entre $(T_g^*\mathscr{L}, T_g^*\varphi)$ et $(\mathscr{L},\varphi)$ sur X en général.) □

2. Le complexe des drapeaux

La motivation pour tout ce que suit est la suivante. Nous avons vu qu'on a toujours $\mu(gx,\lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$. Une question logique est de se demander quand est-ce que on a aussi l'égalité $\mu(x,g^{-1}\lambda g) = \mu(x,\lambda)$. Cela nous permettra de trouver de grands ensembles sur lesquels μ est constant. Or on a une telle égalité sous une condition simple sur g :

Proposition 2.1. *Supposons que la limite*

$$\lim \lambda(\alpha)g\lambda(\alpha^{-1}) = g_0 \tag{2.1}$$

existe. Alors on a $\mu(x,g^{-1}\lambda g) = \mu(x,\lambda)$. Les g_0 obtenus ci-dessus centralisent λ.

Démonstration. Les g_0 centralisent λ par la Proposition 1.2(ii) : Si $\beta \in \mathscr{G}_m$, on a

$$\begin{aligned}\lambda(\beta)g_0\lambda(\beta) &= \lambda(\beta)(\lim \lambda(\alpha)g\lambda(\alpha^{-1}))\lambda(\beta^{-1}) \\ &= \lim \lambda(\beta)\lambda(\alpha)g\lambda(\alpha^{-1})\lambda(\beta^{-1}) \\ &= \lim \lambda(\alpha)g\lambda(\alpha^{-1}) = g_0.\end{aligned}$$

Pour la première partie, on note $x_0 = \lim \lambda(\alpha)x$. La Proposition 1.2 montre alors que $g^{-1}\lambda(\alpha)gx = g^{-1}\lambda(\alpha)g\lambda(\alpha^{-1})\lambda(\alpha)x$ implique que $\lim g^{-1}\lambda(\alpha)gx = g^{-1}g_0x_0$. Donc $g^{-1}g_0x_0$ est notre nouveau point de base. On a

$$\begin{aligned}\mu(x, g^{-1}\lambda g) &= \mu(g^{-1}g_0x_0, g^{-1}\lambda g)\\ &= \mu(g_0x_0, \lambda)\\ &= \mu(x_0, \lambda)\\ &= \mu(x, \lambda).\end{aligned}$$

□

Avec nos techniques standards, on montre que la condition (2.1) définie un sous-groupe $P(\lambda)$ de G. Il y a une déscription un peu plus explicite de ce groupe dans *GIT*. Un résultat important est que $P(\lambda)$ est *parabolique*, c'est à dire que G/P est une variété complète ou que sous un plongement de G dans GL_n, les éléments de P correspondent aux matrices triangulaires supérieures. Il est agréable mais un peu technique de travailler avec ces groupes. En fait on peut montrer beaucoup de résultats (sauf un seul point clé !) sans utiliser cette parabolicité.

Comme ci-dessus, on note que ce résultat donne de l'information sur la fonction μ sur X quand λ est fixe. Une autre façon, plus directe, de l'interpreter est qu'il donne de l'information sur l'invariance de la fonction quand λ varie. On va suivre cette direction. On sait alors que μ a la même valeur pour λ_1 et λ_2 si

$$\lambda_2(\alpha) = g^{-1}\lambda_1(\alpha)g$$

avec $g \in P(\lambda_1)$ (si cette egalité est satisfaite, on a bien sûr $P(\lambda_1) = P(\lambda_2)$).

Une autre possibilité est de travailler avec $\lambda^n : \alpha \mapsto \lambda(\alpha^n)$ au lieu de λ. C'est une opération qui essentiellement ne change pas les propriétés intéressantes de λ. Malheureusement, on a

$$\mu(x, \lambda^n) = n\mu(x, \lambda).$$

Néanmoins on peut échapper à ce problème avec une normalisation appropriée. Pour la construire, il faut travailler avec les *tores maximaux* de G. Ce sont les sous-groupes de G qui sont isomorphes à $\mathscr{G}_m^r$ pour un entier r et qui sont maximaux pour cette propriété. Il est évident que tout λ est contenu dans un tel tore. En revanche, il est plus difficile d'établir :

Proposition 2.2. *Soient T_1, T_2 deux tores maximaux d'un groupe algébrique G. Alors il existe un $g \in G$ tel que $T_1 = gT_2g^{-1}$.*

Choisissons et fixons un tore maximal T de G. La proposition montre que chaque S1P de G peut être conjugé de telle sorte qu'il devient un sous-groupe de T. Inversement, supposons que λ_1 et λ_2 sont deux S1P de T qui sont conjugés sur G, donc $\lambda_2 = g\lambda_1g^{-1}$. Soit $C^0(\lambda_2)$ la composante connexe de 1 dans le centralisateur de λ_2. Alors T est contenu dans $C^0(\lambda_2)$ car le groupe commutatif T contient λ_2. De plus, T est contenu dans $C^0(\lambda_1)$, donc gTg^{-1} est dans $C^0(\lambda_2)$ aussi. Par la proposition, il existe donc un c dans $C^0(\lambda_2)$ tel que $cgTg^{-1}c^{-1} = T$. Donc cg est dans le normalisateur $N_G(T)$ de T dans G. On a encore $\lambda_2 = c\lambda_2c^{-1} = (cg)\lambda_1(cg)^{-1}$. Autrement dit, tous les S1P de T qui sont G-conjugés sont déjà $N_G(T)$-conjugés.

Il est "bien connu" que $N_G(T)/T$ est fini. Or la structure de l'ensemble $\Gamma(T)$ de S1P de T est assez simple ; c'est simplement un espace vectoriel de dimension finie. Choisissons et fixons de plus une forme bilinéaire $B_0(x, y)$ sur $\Gamma(T)$ qui est définie positive. Alors la forme

$$B(x, y) = \sum_{g \in N_G(T)/T} B_0(gxg^{-1}, gyg^{-1})$$

est encore définie positive et invariante sous $N_G(T)/T$. Cela donne une fonction $\lambda \to ||\lambda||$ sur l'ensemble de S1P de G comme suit : on choisit un $g \in G$ tel que $g\lambda g^{-1}$ est un S1P de T et pose $||\lambda|| = B(g\lambda g^{-1}, g\lambda g^{-1})^{1/2}$. Par notre raisonnement ci-dessus, cette fonction est bien définie. De plus $||\lambda^n|| = n||\lambda||$ *si n est strictement positif*.

On fait maintenant la

Définition 2.3. Soient λ_1, λ_2 deux S1P de G. Alors $\lambda_1 \sim \lambda_2$ s'il existent des entiers *strictement positifs* tels que

$$\lambda_2(\alpha^{n_1}) = g^{-1}\lambda_1(\alpha^{n_2})g$$

On dénote l'ensemble des classes d'équivalence de S1P de G par $\Delta(G)$.

La fonction $\nu(x, \lambda) = \mu(x, \lambda)/||\lambda||$ est alors bien défini sur $X \times \Delta(G)$. Le reste de cette section considère l'objet géometrique ainsi obtenu à partir de $\Delta(G)$, qui est appelé *le complexe des drapeaux* de G.

L'astuce d'utiliser un tore maximal $T \subset G$ est très utile pour comprendre la structure de $\Delta(G)$. Notons d'abord que étant donné $\delta \in \Delta(G)$, les tores contenus dans $P(\delta)$ ne sont rien d'autre que les tores "représentants" de δ :

Proposition 2.4. *Soit $\delta \in \Delta(G)$, et soit $T \subset G$ un tore maximal de G. Alors T est contenu dans $P(\delta)$ si et seulement si δ est representé par un S1G composé $\mathcal{G}_m \to T \to G$.*

Démonstration. Un sens est évident. Quant à l'autre, $P(\delta)$ est un sous-groupe, et un représentant λ de δ est automatiquement dans ce sous-groupe. On peut alors conjuguer λ dans T car λ est bien sûr contenu dans une autre tore maximal. □

Le résultat fondamental de fonctorialité est

Proposition 2.5. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes algébriques de noyau fini. On obtient par composition une application $f_* : \Delta(H) \to \Delta(G)$. Cette application est injective, et elle est une bijection si f est surjective.*

Démonstration. C'est un bon exercise de vérifier que φ est bien défini, et la surjectivité est aussi facile si f est surjectif.

L'idée de l'injectivité est d'utiliser la parabolicité de $P(\lambda)$ pour montrer que deux δ_1 et δ_2 admettent des représentants λ_1 et λ_2 dans un seul tore T. Il existe un caractère χ de T tel que $\chi\lambda_1 = 0$ et $\chi\lambda_2 \neq 0$ et qui induit aussi un caractère (encore χ) du tore $f(T)$. Si $f_*(\delta_1) = f_*(\delta_2)$, on pose P pour le groupe parabolique commun associé. Alors $f\lambda_1$ et $f\lambda_2$ sont dans l'intersection $T' = f(T) \cap \mathrm{rad}(P)$. Puisque P est parabolique, l'ensemble total des caractères de P donne un morphisme $X : P \to T''$ qui est une isogénie sur T''. En prenant une puissance de χ, on peut supposer qu'il existe un χ'' tel que $\chi''X = \chi$ sur $f(T)$. On trouve alors une contradiction si on applique χ sur l'égalité $f(\lambda_1^{n_1}) = gf(\lambda_2^{n_2})g^{-1}$. □

On conclut que $\Delta(G)$ est un recollement des $\Delta(T)$, où les T parcourent les tores maximaux de G. Une remarque finale intéressante est que étant donné deux δ_1, δ_2 avec représentants λ_1, λ_2 dans T, on peut définir une droite dans G qui les relie par l'ensemble

$$\{\Delta(l_1^{n_1} l_2^{n_2}) \mid n_1, n_2 \geq 0\}.$$

Proposition 2.6. *Cet ensemble est indépendant de la choix de T.*

Démonstration. Deux tores différents T_1 et T_2 sont conjugés dans $P(\delta_1) \cap P(\delta_2)$ par un g. Cela réduit la question à la égalit'e de $\Delta(\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2})$ et $\Delta(g\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}g^{-1})$, soit à l'inclusion $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2) \subset P(\lambda_1\lambda_2)$. On conclut en utilisant un plongement $G \to \mathrm{GL}_n$ et le fait qu'il existe une diagonalisation simultanée pour les λ_i. □

3. Un résultat sur la fonctorialité de stabilité propre

La dernière partie du Chapter 2 concerne un résultat de fonctorialité. Sa démonstration est facile à comprendre intuitivement, et je vais ici donner une présentation brève. Les détails d'une démonstration précise sont assez désagréables et sont dans tous les cas dans *GIT*.

On a vu qu'une puissance du faisceau ample $\mathscr{L}$ donne un plongement de X dans $\mathbb{P}^n$ tel que l'action de G sur X s'étend en une action de G sur $\mathbb{P}^n$. Soit T un tore maximal de G. Alors on vient de voir dans Remarque 1.10 que la valeur de μ sur les caractères de T est décrite par une fonction linéaire par morceaux avec un nombre fini de morceaux. La fonction ν est alors une fonction continue sur l'ensemble des rayons de T, ou plutôt le groupe de caractères de T. En particulier, ν a un minimum et un maximum sur cet ensemble compact. Par définition de ν pour les autres éléments de G, ce résultat s'étend de T à G. Cela montre que

(i) $|\nu(x,\delta)|$ est borné sur $X \times \Delta(G)$;
(ii) Pour un sous-emsemble S de X, il existe $(x_0, \delta_0) \in S \times \Delta(G)$ tel que $\nu(x_0, \delta_0) \leq \nu(x, \delta)$ sur $S \times \Delta(G)$.

Proposition 3.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme G-équivariant. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau ample et G-trivialisé sur Y et soit $\mathscr{L}$ un faisceau sur $\mathscr{L}$ qui est relativement ample pour f et G-trivialisé. Alors il existe un n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a*

$$X^s_{(0)}(\mathscr{L} \otimes f^* \mathscr{M}^n) \supset f^{-1}(Y^s_{(0)}(\mathscr{M})).$$

Démonstration. Notons qu'on a déjà montré le resultat, avec égalité même, pour les plongements projectifs. Pour $n \geq n_0$ suffisament grand, les faisceaux $\mathscr{M}$ et $\mathscr{L} \otimes f^* \mathscr{M}^n$ sont amples, et on peut plonger X et Y projectivement en utilisant des puissances de ces faisceaux. Comme montré plus précisement dans *GIT*, le résultat sur les plongements projectifs permet de nous restreindre au cas de X et Y propres en considérant la diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\iota_X, \iota_Y f)"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \times \overline{Y} \arrow[d, "p_2"] \\ Y \arrow[r, "\iota_Y"'] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

(Ici $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les clôtures des images de X et Y sous les plongements ι_X et ι_Y.)

Si X et Y sont propres, on utilise encore un faisceau de la forme $\mathscr{L} \otimes f^* \mathscr{M}^n$ et la théorie du complexe des drapeaux. Via les compatibilités standards, on a

$$\nu^{\mathscr{L} \otimes f^* \mathscr{M}^n}(x, \delta) = \nu^{\mathscr{L} \otimes f^* \mathscr{M}^{n_0}} \nu(x, \delta) + (n - n_0) \nu(f(x), \delta).$$

Le premier terme à droite est borné globalement par (i) ci-dessus, le deuxième a un minimum global positif sur $Y^s_{(0)}(\mathscr{M})$ par (ii) (et le Théorème 1.12 bien entendu). D'où le résultat. $\square$