GIT -1 : PRÉLIMINAIRES SUR LES SCHÉMAS

JEROEN SIJSLING

Ces notes consistent en des rappels schématiques nécessaires pour lire le livre *Geometric Invariant Theory* (*GIT*) de Mumford. Ce livre a pour sujet, bien sûr, la théorie des invariants ; mais pas au sens du dix-neuvième siècle. Il faut d'abord expliquer cette différence.

Classiquement, on considère souvent des familles d'objets géométriques décrits par des systèmes paramétrisées d'équations. Un bon exemple est donné par les courbes planes de genre 3 sur un corps, qu'on peut toutes décrire par une équation quartique

$$\sum_{i+j+k=4} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k = 0. \tag{0.1}$$

L'ensemble de ces équations est un espace projectif X de dimension 14 en les 15 variables homogènes $a_{i,j,k}$. Cet espace est géometriquement assez simple. Malheureusement, ce n'est pas l'espace de modules des courbes planes de genre 3. En effet, deux équations qui, à scalaire près, sont liées par une tranformation linéaire de X, Y, Z définissent deux courbes isomorphes. Pour contruire le bon espace de modules, il faut donc prendre le quotient $G\backslash X$ pour l'action de $G = \mathrm{GL}_3$ sur X.

Il y a cent ans (et en fait plus récemment pour les formes (0.1)) on a trouvé des expressions en les $a_{i,j,k}$ qui ne changent pas sous l'action de G et telles que les valeurs de ces expressions déterminent *génériquement* une seule orbite sur G. C'est déjà un résultat très utile, parce qu'il nous permet de vérifier par un calcul simple si deux éléments de X génériques sont liés par G.

Ces expressions invariantes génèrent le corps des invariants $k(X)^G$ de $k(X)$. Elles donnent le quotient $G\backslash X$ à un morphisme birationnel près si ce quotient existe. Le but de *GIT* est beacoup plus précis ; définir ce quotient, montrer son existence et étudier sa géométrie. Plus abstraitement, la question fondamentale prend la forme suivante :

> Soit X une variété sur un corps munie d'une action d'un groupe algébrique G. Pour quelles parties ouvertes U de X peut-on définir un quotient $G\backslash U$ qui est "bon" au sens où il est un schéma séparé (ou propre, ou lisse ...) ?

Pour l'exemple ci-dessus, cette demande donnera des conditions sur les singularités de la forme (0.1). C'est bien sûr très agréable que les conditions sont si géometriques, car cela confirme que la théorie n'est pas trop artificielle.

Ce qui reste ennuyant pour les applications arithmétiques est que la théorie des invariants (*GIT* ou classique) ne donne pas immédiatement des résultats sur les corps qui ne sont pas algébriquement clos. Cela à deux explications simples est essentiellement identiques pour $G = \mathrm{GL}_3$:

(i) Comme $G(\mathbb{Q})$ est Zariski-dense dans $G(\mathbb{C})$, tout invariant pour le premier groupe est aussi un invariant pour la deuxième. Or il existent des courbes planaires de genre 3 qui sont isomorphes sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$; ce n'est rien que la construction des *formes tordues*.

(ii) Par la définition de quotient qui on va utiliser, la fibre de la projection $X \to G\backslash X$ sur un point géometrique du quotient consiste en une seule orbite

$G(\overline{\mathbb{Q}})x$ dans $X(\mathbb{Q})$. Même si $x \in X(\mathbb{Q})$, il n'y a pas de raison d'expecter que les $\mathbb{Q}$-points de cette orbite sont données par $G(\mathbb{Q})x$. Dans le cas contraire, l'orbite est trop grande pour les applications arithmétiques.

Pour résoudre les questions plus subtiles sur $\mathbb{Q}$ ou sur les corps de nombres, il faut utiliser de la cohomologie Galoisienne.

Quant aux notes, on va commencer par des notions basiques, donnant tout d'abord la définition des schémas. Bien sûr, il est impossible de donner un cours complet sur les schémas dans ces notes. Ce que je veux faire est d'expliquer d'où vient la motivation pour les résultats de Mumford, et, si possible, de donner un peu plus d'intuition pour les concepts utilisés.

Pour les raisons ci-dessus, cet exposé ne donne pas de démonstrations des résultats qu'on peut trouver dans la littérature. Ces résultats sont seulement organisés d'une façon à aider, je l'espère, la compréhension du livre.

1. Schémas

Si vous connaissez la définition d'un schéma, ce n'est aucunement nécessaire de lire cette section, présente seulement pour être complet.

Beaucoup de constructions géométriques fondamentales peuvent être exprimés dans le langage suivant.

Définition 1.1. Un *espace localement annelé* est un couple $(X, \mathscr{O}_X)$ avec X un espace topologique et $\mathscr{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur X, tel que pour tout $x \in X$, la *tige*

$$\mathscr{O}_{X,x} = \lim_{U \ni x} \mathscr{O}_X(U)$$

est un anneau local.

Un morphisme d'espaces localement annelés $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ est un couple $(f, f^\sharp)$ tel que f est une fonction continue $X \to Y$ et $f^\sharp$ est un morphisme de faisceaux $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ sur Y tel que les homomorphismes induits sur les tiges sont des homomorphismes locaux.

Rappelons qu'un *faisceau d'anneaux* $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est une collection d'anneaux $\mathscr{F}(U)$, un pour chaque ouvert de X, et des restrictions ρ^U_V, un pour chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$, telle que :

(i) $\rho^U_V \, \rho^V_W = \rho^U_W$ si $W \subset V \subset U$;
(ii) $\rho^U_U = \mathrm{id}$;
(iii) (Recollement des sections compatibles) Soit U un ouvert de X qui est une réunion d'ouverts U_i, et soient $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ des sections telles qu'on a

$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j).$$

Alors il existe une section unique $s \in \mathscr{F}(U)$ telle que $s_i = \rho^U_{U_i}(s)$.

Soit $f \to Y$ un morphisme continu d'espaces topologiques, et soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. Alors on peut définir un faisceau $f^*\mathscr{F}$ sur Y en posant

$$f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

avec les restrictions induites.

Un *morphisme de faisceaux* $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ sur X est un ensemble de morphismes $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ qui est compatible avec les restrictions.

Dans la définition ci-dessus, on interprète les $\mathscr{O}_X(U)$ comme les fonctions globales sur l'ouvert U. On peut par exemple prendre des fonctions C^∞ ou holomorphes, ce qui permet de formuler les théories des variétés différentiables et surfaces de Riemann dans ce langage.

Pour les schémas, on travaille avec des anneaux généraux. Soit R un anneau quelconque. Alors on denote par Spec R l'ensemble des idéaux premiers de R. Si $f \in R$ n'est pas un diviseur de zéro, on peut construire le localisé R_f, et on a une inclusion canonique Spec $R_f \to$ Spec R, car les idéaux de R_f correspondent aux idéaux de R qui ne contiennent pas f. Notons l'image d'une telle inclusion par $D(f)$. On a $D(f) \subset D(g)$ si et seulement si $f^n \in gR$ pour un n positif, auquel cas on a aussi un homomorphisme canonique $R_g \to R_f$.

À partir de R, on obtient de R un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ en posant

(i) $X =$ Spec R, fourni avec la topologie determinée par la base d'ouverts Spec R_f ;

(ii) $\mathscr{O}_X$ est le faisceau sur X uniquement determiné par les conditions
  (a) $\mathscr{O}_X(D(f)) = R_f$;
  (b) Si $D(f) \subset D(g)$, la restriction $\mathscr{O}_X(D(g)) \to \mathscr{O}_X(D(f))$ est donnée par l'homomorphisme canonique $R_g \to R_f$.

Par abus de notation, cet espace annelé est souvent noté Spec R. Cet espace est appelé *le schéma affine* associé à R.

Cette définition est assez technique. Remarquons que dans les cas classiques, elle correspond néanmoins exactement à ce qu'on veut. Par exemple, une variété affine X sur un corps k est classiquement définie par des équations

$$f_1(x_1, \dots x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots x_n) = 0 \tag{1.1}$$

dans des variables $x_1, \dots, x_n$. On a :

(i) X est le schéma affine associé à l'anneau $R = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$;

(ii) Les fonctions globales $\mathscr{O}_X(X)$ sur X ne sont rien que les éléments de R ;

(iii) Les ouverts $D(x_i) =$ Spec R_{x_i} correspondent aux points de X avec $x_i \neq 0$;

(iv) Les fonctions dans $\mathscr{O}_X(D(x_i))$ sont les éléments r/x_i^n du localisé R_{x_i}.

L'avantage considérable de la nouvelle définition est qu'elle est intrinsèque ; considéré comme schéma, X ne dépend plus du plongement dans $\mathbb{A}^n$.

Une autre chose agréable est que les morphismes des espaces annelés

$$(\text{Spec }(S), \mathscr{O}_{\text{Spec }(S)}) \longrightarrow (\text{Spec }(R), \mathscr{O}_{\text{Spec }(R)})$$

correspondent bijectivement aux morphismes des anneaux $g : R \to S$. Le morphisme topologique f : Spec $S \to$ Spec R associé à un tel g envoie un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans Spec R à l'idéal premier $g^{-1}(\mathfrak{p})$ dans Spec S. On a alors $f^{-1}(\text{Spec } R_x) =$ Spec $S_{g(x)}$, et $f^\sharp$ est determinée uniquement par les homomorphismes canoniques

$$\mathscr{O}_{\text{Spec } R}(D(x)) = R_x \to S_{g(x)} = \mathscr{O}_{\text{Spec } S}(D(g(x))) = \mathscr{O}_{\text{Spec } S}(f^{-1}(D(x))).$$

Comme nous venons de voir ci-dessus, les sous-espaces $D(f) =$ Spec R_f de Spec R correspondent géometriquement aux points de Spec R pour lesquels f ne s'annule pas. Pour ce raison, les quotients r/f^n avec $r \in R$ et n intègre sont bien définis dans $\mathscr{O}_{\text{Spec } R}(D(f))$. En effet, on peut montrer :

Proposition 1.2. *$\mathscr{O}_{\text{Spec } R}(D(f))$ est isomorphe à R_f, et $(D(f), \mathscr{O}_{\text{Spec } R}|_{D(f)})$ est isomorphe au schéma affine associé à l'anneau R_f. D'où :*

(i) *Soit $s \in \mathscr{O}_{\text{Spec } R}(\text{Spec } R) = R$. Si s est nul dans $\mathscr{O}_{\text{Spec } R}(D(f))$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n s = 0$ dans R.*

(ii) *Soit $s \in \mathscr{O}_{\text{Spec } R}(D(f)) = R_f$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n s$ s'étend à une section de $\mathscr{O}_{\text{Spec } R}(\text{Spec } R) = R$.*

La faiblesse de la première partie est peut-être un peu surprenant ; puisque $D(f)$ est un ouvert dans Spec R, on expecterait intuitivement que la conclusion est déjà vrai pour $n = 0$. Néanmoins, cette forme plus forte est seulement valide si R est intègre. Bien entendu, dans nos applications, cela est presque toujours le cas.

Il est immédiat par la définition d'un espace annelé qu'on peut recoller ces espaces. Or un schéma est un recollement de schémas affines :

Définition 1.3. Un *schéma* est un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X(U))$ tel que pour chaque $x \in X$ il existe un ouvert U contenant x tel que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ est isomorphe à un schéma affine.

Selon Grothendieck, il faut qu'on ne considère pas seulement les schémas mais aussi les *schémas relatifs*. Ce sont simplement les morphismes $f : X \to S$, où S est un *schéma de base* fixe. Un morphisme de schémas sur S de $f : X \to S$ à $g : Y \to S$ est alors un morphisme $h : X \to Y$ de schémas tel que $f = gh$.

C'est plus pratique qu'il ne semble. Par exemple, donner une courbe sur un corps de nombres K n'équivaut pas à donner un schéma X, mais à donner un morphisme $X \to \operatorname{Spec} K$. Si on oublie ce morphisme, alors les schemas X^σ obtenus par la conjugaison des équations de X sont isomorphes à X comme schémas, mais pas comme schémas sur Spec K.

Enfin, les points topologiques d'un schéma ne correspondent pas à l'intuition habituelle d'une point. Voici alors une nouvelle définition :

Définition 1.4. Soient X et Y deux schémas. Alors un *Y-point* de X est un morphisme $Y \to X$.

On note $X(Y) = \operatorname{Hom}(Y, X)$ l'ensemble des points de X sur Y.

Si X est une variété affine sur un corps k définie par des équations (1.1), alors Spec k est un seul point, et $X(\operatorname{Spec}\ k)$ n'est rien que l'ensemble des solutions de (1.1).

Si R est un anneau, on note par abus $X(R) = X(\operatorname{Spec} R)$. Une morphisme $Y \to Z$ donne une application $X(Z) \to X(Y)$, donc un homomorphisme d'anneaux $R \to S$ donne une application $X(R) \to X(S)$. C'est évident qu'on peut "relativiser" la définition d'un point dans un point "sur S".

2. Séparabilité et propreté

Définition 2.1. Soient $f : X \to S$ et $g : S' \to S$ deux schémas sur S. Alors il existe un schéma unique $X' = X \times_S S'$ telle qu'on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

et telle que pour tout autre diagramme de cette forme

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme unique $h : Z \to X'$ telle que $f'' = hf'$ et $g'' = hg'$. Ce X', avec ses projections, est appelé le *produit fibré* de f et g. Le morphisme $f' : X' \to S'$ est appelé *l'extension de f par g*.

Pour les schémas affines, cette construction donne encore un schéma affine, qui correspond au produit tensoriel des anneaux correspondants. Notons aussi qu'on peut construire le produit fibré en construisant d'abord les produits fibrés par recouvrement affine de X et S' et recoller les produits résultants.

Si $S \to \operatorname{Spec} k$ est une variété sur un corps k algébriquement clos et X et S' sont des variétés sur k aussi, alors le produit fibré X' est encore une variété sur k. Les points sur $X'(k)$ de ces variétés sont simplement les éléments (x, s') du produit $X(k) \times S'(k)$ tels que $f(x) = g(s')$. En particulier, si $S = \operatorname{Spec} k$, alors le produit fibré correspond au produit naif.

Une des notions fondamentales pour Mumford est la séparabilité. En effet ces notions de stabilité et semi-stabilité sont introduises pour assurer la séparabilité de certains quotients.

Définition 2.2. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas, ou autrement dit un schéma sur S. Si on prend $Z = X$ dans la définition ci-dessus, avec les projections égales à l'identité, alors on obtient un morphisme ("diagonale") $\Delta : X \to X \times_S X$. On dit alors que f est séparé si l'image de Δ est fermée.

La motivation est :

Proposition 2.3. *Soient X et Y des schémas sur S, et soient $f, g : X \to Y$ deux morpismes sur S. Si Y est séparé, alors l'ensemble des points x de X pour lesquels $f(x) = g(x)$ est fermé.*

Le contre-exemple classique pour la séparabilité est le suivant. Prenons deux copies U_1 et U_2 de la droite affine $\mathbb{A}^1$ (sur un corps algébriquement k, disons), et recollons ces droites sur $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. Cela donne un espace annelé X qui est topologiquement un peu bizarre, mais bien un schéma parce que par construction, tout point à un voisinage qui est isomorphe au schéma affine $\mathbb{A}^1$.

On construit le produit fibré $X \times X$. C'est un recollement des ouverts $U_1 \times U_1$, $U_1 \times U_2$, $U_2 \times U_1$ et $U_2 \times U_2$. L'image Δ de X sous le morphisme diagonal consiste simplement en les points (x, x). En particulier, cette image est contenu dans $U_1 \times U_1 \cup U_2 \times U_2$. Mais on peut construire la clôture de cette image en utilisant le recouvrement ci-dessus. Or l'intersection avec $U_1 \times U_2$ consiste en les points (x, x) avec $x \neq 0$. Ce n'est pas un fermé, donc la clotûre de Δ diffère de Δ et X n'est pas séparé sur k.

On définie aussi :

Définition 2.4. Un schéma $f : X \to S$ sur S est dit *propre* si toutes ses extensions de base $f' : X' \to S'$ sont des morphismes fermés d'espaces topologiques.

Intuitivement, les schémas propres "ne ratent pas de points". On a des critères très utiles, mais peut-être pas très élémentaires, pour la séparabilité et la propreté. Soit R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K. Alors par composition, on obtient une application $X(R) \to X(K)$. On dit qu'on peut relever un point de $X(K)$ (à $X(R)$) s'il est dans l'image de ce morphisme.

Théorème 2.5. *Soit $f : X \to S$ un schéma sur S. Alors f est séparable (resp. propre) si et seulement si pour tout anneau de valuation discrète R on peut relever tout point x de $X(K)$ tel que $f(x) \in S(R) \subset S(K)$ en au plus un point (resp. un point unique) de $X(R)$.*

Une classe de schémas très utile est celle des schémas projectifs. Nous avons déjà construit des schémas affines en partant des anneaux générales par localisation. Si R est un anneau gradué, alors on peut faire une deuxième construction en utilisant l'ensemble $\operatorname{Proj} R$ des idéaux premiers de R qui sont *homogènes*, c'est à dire générés par leurs éléments homogènes. Cet ensemble est un espace topologique dans une façon naturelle ; une base d'ouverts est donnée par les ensembles

$$D^+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

pour f les éléments homogènes de R.

Il nous reste de définir un faisceau d'anneaux. Soit f un élément homogène de f ; alors on pose

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\, R}(D^+(f)) = R_f^{(0)},$$

où $R_f^{(0)}$ est le sous-anneau des éléments de degré 0 dans le localisé R_f. Les restrictions sur la base d'ouverts donnée ci-dessus sont encore données par des homomorphismes canoniques similaires.

L'exemple classique et bien aimé est celui des anneaux $R = k[x_0, \ldots, x_n]$. Alors $D^+(x_i)$ correspond a l'anneau $k[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$ qui définie un espace affine de dimension n. Or Proj R est le recollement de ces sous-schḿas affines par les identifications canoniques

$$k[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]_{x_j/x_i} \longrightarrow k[x_0/x_j, \ldots, x_n/x_j]_{x_i/x_j}$$

On peut identifier les points de Proj R sur k avec les tuples $(a_0, \ldots, a_n)$ à scalaires près. Les points dans les ouvert $D^+(x_i)$ sont alors les tuples avec x_i, qui ont un répresentative unique de la forme $(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{a_n}{a_i})$.

En recollant sur un recouvrement ouvert, on définie le schéma $\mathbb{P}_S^n$ pour un schéma arbitraire S. Remarquons que dans nos application, on sera presque toujours dans le cas simple $S = \mathrm{Spec}\, k$ considéŕe ci-dessus.

Définition 2.6. On dit qu'un schéma $f : X \to S$ sur S est projectif s'il admet une factorisation

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}_S^n \longrightarrow S.$$

Un résultat fondamental sur les morphismes propres est

Théorème 2.7. *Une morphisme projectif est propre et séparé.*

Intuitivement, ce résultat semble évident en utilisant le critère valuatif de proprété, au moins pour le cas $S = \mathrm{Spec}\, k$. En effet, un point de $X(K)$ est de la forme

$$(a_0, \ldots, a_n) \tag{2.1}$$

avec les $a_i \in K$. Après multiplication avec une puissance d'une uniformisante de R, on a que le minimum des valuations des a_i est égal à 0, et dans ce cas (2.1) définie un point de X sur R aussi.

Avec les mêmes méthodes, on peut montrer que $X(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}) = X(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z})$ pour un schéma propre sur Spec $\mathbb{Z}$.

3. Faisceaux inversibles et amples

Un schéma étant fourni avec un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$, on définit sans problème les *faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules* sur X. Nous considérons une classe spéciale de ces faisceaux :

Définition 3.1. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules sur un schéma X. On dit que $\mathscr{L}$ est *inversible* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i tels que $\mathscr{L}|_{U_i}$ et isomorphe à $\mathscr{O}_{U_i}$.

Pour un tel U_i, il existe donc un $s \in \mathscr{L}(U_i)$ tel que multiplication par s donne un isomorphisme $\mathscr{O}_{U_i} \to \mathscr{L}|_{U_i}$. Sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, on obtient alors un automorphisme $\varphi_{i,j}$ de $\mathscr{O}_{U_i \cap U_j}$ qui est donné par multiplication avec $s_j^{-1} s_i$. On a $\varphi_{j,k}\varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ sur l'intersection triple $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Inversement, étant donné des $\varphi_{i,j}$ qui satisfont ces conditions, on peut construire un faisceau inversible $\mathscr{L}$ par recollement. Ceci est appelé la construction de faisceaux inversibles de cocycles de Čech.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. L'opération $\mathscr{L} \mapsto f_*\mathscr{L}$ définie ci-dessus peut envoyer un faisceau inversible sur un faisceau non-inversible. Il existe une autre construction qui est plus technique mais qui préserve l'inversibilité.

Définition 3.2. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau sur Y. On pose *l'image inverse*

$$f^{-1}(\mathscr{L})(U) = \lim_{V : U \supset f^{-1}(V)} \mathscr{L}(V).$$

Supposons que $\mathscr{L}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules. Alors on définit le *pullback*

$$f^*(\mathscr{L})(U) = \mathscr{O}_X(U) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y(U)} f^{-1}\mathscr{L}(U)$$

Ici le morphisme $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ est induit par le morphisme $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ donné par f. Une section $s \in \mathscr{L}(V)$ donne une section $f^*s \in f^*(f^{-1}(V)$ qui est encore appelée le *pullback* de la section s.

Normalement, on appelerait aussi $\mathscr{L}$ un *fibré en droites*. Mumford utilise ici parfois une notion équivalente mais différente. Sa notion est plus géométrique. La motivation est que $\mathscr{O}_X$ lui même peut être considéré comme l'ensemble des sections de la projection $X \otimes \mathbb{A}^1 \to X$.

On peut aussi contruire une telle projection $L \to X$ pour un faisceau inversible $\mathscr{L}$ par recollement. On choisit simplement des s_i comme ci-dessus et identifie un élément (x, a) de $U_i \times \mathbb{A}^1$ avec l'élément $(x, s_j^{-1} s_i a)$ de $U_j \times \mathbb{A}^1$ sur les intersections. Ce L est appelé *l'espace étalé* associé à $\mathscr{L}$.

Au niveau des espaces étalés, la construction ci-dessus correspond au produit fibré. La différence entre ces notions n'est pas très grande : $\mathscr{L}(U)$ est simplement l'ensemble des section du projections $L \to X$ sur U (qui on vérifie est vraiment un $\mathscr{O}_X(U)$-module).

Étant donné un faisceau inversible, on peut construire des ouverts de X :

Définition 3.3. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur un schéma X, et soit $s \in \mathscr{L}(X)$ une section globale de $\mathscr{L}$. On note X_s l'ouvert de X sur lequel s ne s'annule pas.

Plus formellement, $x \in X$ appartient à X_s si et seulement si, pour un ouvert affine contenant x sur lequel $\mathscr{L}$ trivialise, il existe un isomorphisme $\mathscr{L}_U \to \mathscr{O}_U$ qui envoie s sur un élément de l'anneau $\mathscr{O}_U(U)$ qui n'est pas dans l'idéal de $\mathscr{O}_U(U)$ correspondant à x.

En utilisant la Proposition 1.2 sur un recouvrement, on voit facilement

Proposition 3.4. *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur un schéma X.*

(i) *Soit $s \in \mathscr{L}(X)$. Si s est nul sur X_s, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n s = 0$ sur X.*
(ii) *Soit $s \in \mathscr{L}(X_s)$. Alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n s$ s'étend à un élément de $\mathscr{L}(X)$.*

La théorie des faisceaux inversibles prend une forme très agréable pour les espaces projectifs. Soit M un module gradué sur un anneau gradué R. On peut encore recoller les localisations $M_f^{(0)}$ pour obtenir un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\, R}$-modules. Un exemple spécial et très important est le S-module gradué $S(1)$. Les éléments de ce module sont simplement les éléments de S, mais la graduation est diminuée de 1.

Proposition 3.5. *Supposons que M donne un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur* Proj S*, et soit $\mathscr{L}(n) = \mathscr{L} \otimes (\mathscr{O}(1))^{\otimes n}$. Alors*

(i) *Les sections globales de $\mathscr{L}(n)$ sont données par $M^{(n)}$.*
(ii) *Soit $s \in S$, considéré comme une section d'une puissance de $\mathscr{O}(1)$ par (i). Les sections de $\mathscr{L}(n)$ sur $(\text{Proj } S)_s$ sont données par $M_s^{(n)}$.*
(iii) *(Conséquence de (ii) et Proposition 3.4) Il existe un N et un recouvrement affine $\{U_i\}$ de* Proj S *tel que pour tout U_i, il existe une section globale $s \in L(N)(X)$ avec $L(N)|_{U_i} = s\mathscr{O}_{U_i}$. On dit que $\mathscr{L}(N)$ est* généré par ses sections globales.

Inversement, un faisceau inversible $\mathscr{F}$ vient toujours d'un S-module gradué M. En effet, on peut prendre

$$M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}(n)(X)$$

Soit X un schéma arbitraire. On appèle les faisceaux $\mathscr{L} = f^*(\mathscr{O}(1))$ obtenus par les plongements projectifs de X des faisceaux *très amples* (ce nom est un peu bizarre mais signifie que $\mathscr{L}$ a beaucoup des sections). On peut vérifier si un faisceau $\mathscr{L}$ sur X est très ample en prenant une base $s_0, \ldots, s_n$ de $\mathscr{L}(X)$ et vérifiant si

$$x \mapsto (s_0(x) : \ldots : s_n(x))$$

est un plongement. Notons que les $s_i(x)$ ne sont pas bien définis, seuls leurs quotients le sont, ce qui ensure néanmoins la bonne définition du morphisme précédent.

Comme $\mathscr{O}(1)$, les faisceaux très amples $\mathscr{L}$ sur X ont la propriété que pour tout faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur X, il existe un n tel que $\mathscr{L}^n \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est généré par ses sections globales. Cette propriété permet une formulation indépendante qui est très utile :

Définition 3.6. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau sur un schéma X. On dit que $\mathscr{L}$ est *ample* si et seulement s'il satisfait une des conditions suivantes :

(i) Pour tout faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur X, il existe un n tel que $\mathscr{L}^n \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est généré par ses sections globales ;
(ii) Une puissance positive de $\mathscr{L}$ est très ample ;
(iii) On peut recouvrir X avec des ensembles *affines* de la forme X_s, où $s \in \mathscr{L}^n$.

La démonstration de l'équivalence est un peu technique. Essentiellement, si la condition plus faible (iii) est satifaite, on relève des générateurs pour les anneaux correspondants aux X_s par la Proposition 3.4, ce qui donne un plongement comme en (ii) plus au moins par construction. L'équivalence de (i) et (ii) est un conséquence de Proposition 3.5(iii) que on peut montrer d'une façon similaire.

La version relative d'amplitude est la suivante :

Définition 3.7. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas, et soit $\mathscr{L}$ un faisceau sur X. On dit que $\mathscr{L}$ est *ample relativement à f* s'il existe un recouvrement de S par des ouverts U_i pour lequel $\mathscr{L}$ est ample sur les ouverts $f^{-1}(U_i)$.

On a

Proposition 3.8. *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes de schémas. Soit $\mathscr{L}$ sur X ample relativement à f et $\mathscr{M}$ sur X ample relativement à g. Alors il existe un n_0 tel que $L \otimes_{\mathscr{O}_X} (f^*\mathscr{M})^{n_0}$ est ample relativement à gf pour tout $n \geq n_0$.*

La raison si on remplace "relativement ample" par "ample" est la suivante. Les faisceaux très amples sont toujours générés par leurs sections globales. Alors une puissance $\mathscr{M}^{n_0}$ de $\mathscr{M}$ l'est aussi. Donc aussi $(f^*\mathscr{M})^{n_0}$, qui en particulier a au moins une section globale s. Il existe un N tel que $\mathscr{L}^N$ est très ample. Soient $s_0, \ldots, s_n$ les sections de $\mathscr{L}^N$ qui donnent un plongement projectif, alors $(s^N s_0, \ldots, s^N s_n)$ donnent un plongement aussi. Donc $\mathscr{L}^N \otimes (f^*\mathscr{M})^{Nn_0}$ est très ample et $L \otimes_{\mathscr{O}_X} (f^*\mathscr{M})^{n_0}$ est ample.